

УДК 519.63

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕРЕБРАЛЬНОЙ ГЕМОДИНАМИКИ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

© М.В. Козлова, А.В. Горбунов

*Ключевые слова:* математическое моделирование; церебральная гемодинамика.

Дана оценка существующим математическим моделям церебральной гемодинамики. Сформулирована постановка задачи построения математической модели сосудов головного мозга.

Применение математического моделирования и численных методов в естествознании привело к созданию нового метода исследования – *вычислительного эксперимента*, который приобретает особое значение в тех случаях, когда в силу причин экономического или методического характера проведение прямого эксперимента сопряжено с большими трудностями или практически невозможно [1].

Физиологические методы исследования регулирования мозгового кровотока являются опасными, требуют сложных оперативных вмешательств. В этих условиях важно, чтобы прямому эксперименту предшествовало теоретическое исследование соответствующего процесса. Вычислительный эксперимент дает возможность на математической модели процесса изучить закономерности взаимодействия различных гемодинамических параметров, обнаружить и предсказать ряд интересных и важных в практическом отношении эффектов, проверить те или иные гипотезы [2–4].

Математическое моделирование в связи с развитием численных методов решения задач гемодинамики и значительным увеличением производительности вычислительной техники стало играть важную роль в изучении мозгового кровообращения [5]. Оно позволяет получать качественные и количественные характеристики течения крови в норме и патологии, выявлять закономерности функционирования кровеносной системы, прогнозировать последствия хирургических вмешательств и различных заболеваний. Все это обуславливает теоретическую и практическую ценность математического моделирования [6].

Классическое описание циркуляции крови в организме дано Hargve. С тех пор многие исследователи делали попытки применить математические модели для описания как частей, так и всей системы кровообращения. Эти модели охватывают явления, происходящие в сосудистом русле (изменения давления, кровотока, распространение волн в потоке), свойства сосудов (радиус, толщина стенок, упругость, характер ветвлений), транспортные функции кровообращения, регуляцию кровообращения [7].

Чисто резистивные модели впервые были применены Young (1809 г.) и Poiseuille (1840 г.). Эти модели пригодны только для установившихся течений, т. к. в них полностью пренебрегают инерционными эффектами.

Такие модели наиболее целесообразно применять для изучения влияния реологических характеристик крови и растяжимости стенок сосудов при стационарной перфузии изолированных конечностей или органов [8].

В первой модели с сосредоточенными параметрами, созданной в 1899 г. O. Frank [9], аорта и крупные артериальные сосуды рассматривались как «эластичный резервуар» («упругая камера»), а остальная часть сосудистой системы – как чисто резистивный элемент, соединенный последовательно с артериями.

Эта модель наиболее совершенна по сравнению с чисто резистивными моделями, т. к. она учитывает периодическое накопление крови в артериях и зависимость давления от времени. Модель дает удовлетворительное описание жесткой и мало протяженной артериальной системы. Основной недостаток модели в том, что она не описывает распространение волн давления.

Для подробного изучения таких явлений, как распространение волн, целесообразнее применение моделей с распределенными параметрами. В большинстве опубликованных работ по вопросам распространения волн используют методы линейного анализа, т. к. их простота сочетается с возможностью описания наиболее существенных свойств волн давления и потока. Авторами первых линейных моделей с распределенными параметрами являются Womersley (1957 г.) и McDonald (1960 г.) [10]. В этих моделях кровь рассматривается как несжимаемая ньютоновская жидкость, а ее движение считается ламинарным. Уравнение движения в этих моделях представляет собой линейные уравнения Навье–Стокса.

Для точного описания постепенных изменений формы волны по мере удаления от сердца требуется учет нелинейных эффектов. Наиболее важными из них являются нелинейность реологических характеристик стенок сосудов, конвективное ускорение и изменение просвета сосуда в зависимости от давления.

Первые нелинейные модели для исследования кровообращения применил Эйлер (1755 г.) и Ламберт (1958 г.).

Современные нелинейные модели более грубы, чем соответствующие линейные в том отношении, что они основаны на одномерной аппроксимации течения и, по существу, эмпирических соотношениях для зависимо-

сти поперечного сечения потока от координаты и величин давления. Тем не менее, нелинейные модели с распределенными параметрами позволяют воспроизводить изменение импульса давления в зависимости от расстояния от сердца.

В модели, разработанной Atabeki Ling, учтены нелинейные члены конвективного типа в уравнениях Навье–Стокса, а также нелинейное поведение артериальных стенок и их большие деформации. Авторы упростили сложные граничные условия, принимая, что радиальное движение в артериях оказывает влияние, главным образом, посредством давления волн, что можно пренебречь продольным движением стенок артерий, и что волна давления распространяется в продольном направлении соответствующего участка артерии. Уравнения решаются методом конечных разностей.

Для обработки экспериментальных результатов, полученных с помощью методики Гюртле, Ю.Е. Москаленко и Г.П. Филановская [4] применили метод синтеза электрических эквивалентных цепей по частотной характеристике системы, использовавшийся ранее только в теоретической электротехнике. Как отмечают авторы, логарифмический метод дает возможность по параметрам пульсовых колебаний давления крови на входе и выходе системы артерий основания черепа синтезировать ее эквивалентную электрическую схему, отражающую особенности функционирования рассматриваемой системы.

Другой подход использовался при создании модели, разработанной Nimigich и Clark, она дает информацию о потоках крови в различных артериях системы и о давлении в артериальных соединениях. Первая модель Виллизиева круга собаки, созданная Nimigich и Clark с соавторами, была реализована также физически в виде соединения трубок. В этой модели артерии представлены как жесткие трубки, поток крови считается постоянным. В данной модели не воспроизведены активные свойства артерий основания головного мозга [11].

В модели Chao и Huang [12] Виллизиев круг разбивается на 22 участка приблизительно одинакового объема. На каждом участке поток рассматривается как пульсирующий, осесимметричный, ламинарный; стенки сосуда – как эластичные. Авторы предполагают, что давление не зависит от радиуса трубки. В результате задача сводится к решению уравнения Навье–Стокса, записанного в цилиндрических координатах. Использование данной модели в исследованиях затруднительно. Для достаточно сложной по своей геометрии системы авторы сделали попытку применить уже хорошо разработанные для прямого артериального сосуда линейные модели с распределенными параметрами.

Благодаря развитию и широкому внедрению современных методов визуализации в клинику в последнее время стало возможным более подробно описывать геометрию сосудистой системы в интересующей области.

Несмотря на широкие возможности численного моделирования при использовании алгоритмов расчета гемодинамических течений в реальных областях, данный подход не лишен недостатков. В частности, для получения адекватных физиологических параметров кровотока необходимо корректно задавать граничные условия. Кроме того, описание всей сосудистой систе-

мы не всегда целесообразно, является технически невозможным и требует значительных вычислительных затрат. Учитывая этот факт, в последнее время распространен следующий подход: выделяются участки сосудистой системы, подробная геометрия которых задается с помощью данных МР-ангиографии. Для моделирования остальных участков сосудистой системы используются одномерные модели. Наиболее часто в качестве одномерных моделей используются стационарные соотношения, основанные на выполнении закона Пуайзеля. В качестве условий сопряжения требуется сохранение величины давления, усредненной по сечению скорости, сечению сосуда, сдвиговых напряжений. В ряде случаев уточняется профиль скорости в трех или двухмерной модели в соответствии с профилем пуайзелевского течения.

Итак, анализ публикаций по математическому моделированию церебральной гемодинамики показал, что большинство из них посвящено моделированию какого-либо одного процесса: либо в моделях сосудов головного мозга не указана зависимость физиологических параметров от морфологии, либо в модели заложена специфика для исследования одной конкретной задачи. Эти модели в соответствии с целями исследований, проводимых авторами, отличаются друг от друга как степенью детализации геометрической структуры моделируемой системы, так и используемым математическим аппаратом.

Таким образом, разработка математической модели церебральной гемодинамики для применения в клинических и научных исследованиях должна удовлетворять следующим требованиям: модель должна адекватно отражать основные функциональные параметры сосудов головного мозга в зависимости от их строения; свойства и функции модели должны иметь физиологическую интерпретацию; математическое описание модели должно подразумевать возможность создания на его основе программного обеспечения; в модели должна быть предусмотрена возможность имитации работы как здорового кровообращения, так и различных видов патологии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Каменский А.В. Математическое моделирование поведения бифуркации сонной артерии человека на различных стадиях атеросклеротического поражения до и после операционного вмешательства: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2007.
2. Перегудова Т.В. Математическое моделирование гемодинамики системы артерий основания головного мозга: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1984.
3. Астраханцева Е.В., Гидасов В.Ю., Ревизников Д.Л. Математическое моделирование гемодинамики крупных кровеносных сосудов // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 8. С. 61-80.
4. Москаленко Ю.Е., Филановская Т.П. К вопросу об изменении пульсирующего кровотока в артериях основания черепа // Физиологический журнал СССР им. И.М. Сеченова. 1967. Т. 53. № 11. С. 1387-1392.
5. Шумаков В.И., Новосельцев В.Н., Сахаров М.П., Штенгольд Е.Ш. Моделирование физиологических систем организма. М.: Медицина, 1971.
6. Соколова Т.В. Математические модели некоторых механизмов регуляции гемодинамики: автореф. дис. ... канд. тех. наук. М., 2007.
7. Quarteroni A. Modeling the Cardiovascular System // A Mathematical Adventure. P. I-II. SIAM News. 2001. V. 34. № 5-6.
8. Лукин В.А. Математическое моделирование церебральной гемодинамики: автореф. дис. ... канд. тех. наук. М., 2004.

9. *Frank O.* Die Grandform des arteriellen pulses // *Z. Biol.* 1899. B. 37. S. 483-526.
10. *McDonald D.A.* Blood flow in arteries. L.: EdwardArnold, 1974. 734 p.
11. *Himurik W.A., Clark M.E.* Cerebral blood flow comparisons between model and prototype // *J. Appl. Physiol.* 1971. V. 31. № 6. P. 873-879.
12. *Chao J.C., Huang N.H.C.* A dynamic model of the circle of Willis // *J. Biomech.* 1971. V. 4. P. 141-147.

Поступила в редакцию 19 октября 2012 г.

Kozlova M.V., Gorbunov A.V. INTRODUCTION OF CEREBRAL HEMODYNAMICS WITH HELP OF MATHEMATICAL MODELING

An assessment of existing mathematical models of cerebral hemodynamics is given. The problem of constructing a mathematical model of the brain vessels is formulated.

*Key words:* mathematical modeling; cerebral hemodynamics.